



TITLE:

管内の気体の共鳴振動によって生じる音響流の渦の分岐について (非線形・大自由度の波動現象の数理)

AUTHOR(S):

矢野, 猛

CITATION:

矢野, 猛. 管内の気体の共鳴振動によって生じる音響流の渦の分岐について (非線形・大自由度の波動現象の数理). 数理解析研究所講究録 2000, 1152: 139-145

ISSUE DATE:

2000-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/64086>

RIGHT:

管内の気体の共鳴振動によって生じる音響流の渦の分岐について

北大工 矢野 猛 (Takeru Yano)

1. はじめに

線形音響学の枠組みの中では、音波の存在は流体粒子をその平衡位置のまわりに微小振動させるのみで、正味の質量輸送を導かない。しかしながら非線形効果を見逃すことはできない場合には、正味の質量流れが発生することがある。これを音響流という。¹

管内に有限振幅の定在音波が存在するとき、管壁上の振動境界層外縁に非線形効果によって定常な流速成分が生じ、これが管内 (境界層の外側) に定常な音響流を誘起する。この音響流は、レイノルズ数が 1 より小さい遅い定常流であり、定在音波の半波長あたり 1 対の循環流 (渦) をつくることが知られている (Rayleigh 型の音響流)。²

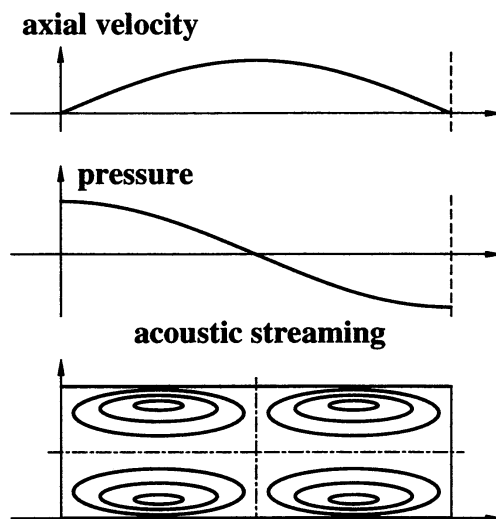


図 1. 定在音波とその非線形効果により誘起される Rayleigh 型の音響流. 管壁に沿って圧力振動の節から腹に向かう流れが生じる. 図には、管の中心軸に関する対称性によって生じる 4 つの循環流が示されている.

音波の周波数が管の長さによって定まる共鳴条件を満たしていれば、その振動は大振幅となり、衝撃波さえ生じうる。波の振動の振幅が大きければ、当然のこととして誘起される音響流の流速も大きく、高レイノルズ数の流れとなりうる。近年、超強力音波が先端技術で利用されるようになり、強い非線形効果による速い (高レイノルズ数の) 音響流とその乱流現象の理解は、工学的にも重要な問題として注目されつつある。³ しかしながら、音響流の乱流現象に関しては、ほとんど手がつけられておらず、何も分かっていないといっても過言ではない。

筆者は、最近、共鳴振動によって誘起される音響流が、レイノルズ数が大きくなるにつれて渦構造を変えながら非定常性を増してゆき、ついには乱流状態へと発展することを数値シミュレーションによって明らかにした。⁴ 本研究は、音響流が乱流状態に至る前段階の比較的低レイノルズ数において、1 対の渦からなる Rayleigh 型の音響流が、異なる渦構造 (複数の渦の対を含む構造) へ発展する過程を調べることを目的とする。

2. 問題とその定式化

長さが L で幅が W の二次元の管の一端を閉じて、他端にピストンを取り付け、内部を理想気体で満たす。ピストンを振幅 a 、角振動数 ω で正弦振動させるとする (図 2)。本研究では、管の長さとのピストンの角振動数の間に

$$\frac{L\omega}{c_0} = \pi \quad (1)$$

が成立する共鳴状態を考える。ただし、 c_0 は静止一様状態の音速である。このような管内の気体の共鳴振動の研究は、前世紀の Kundt の実験に始まり、数多くの研究がなされており、音響流や管内を周期的に往復する衝撃波の発生⁵などが知られている。

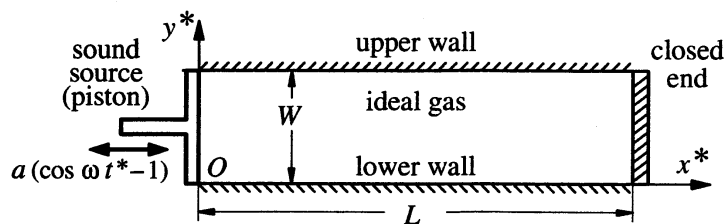


図 2. 概念図

図 2 に示すように座標の原点をとり、ピストンの初期位置からの距離を x^* 、下側の管壁からの距離を y^* とする。以下の無次元変数を導入する:

$$x = \frac{x^*\omega}{c_0}, \quad y = \frac{y^*\omega}{c_0}, \quad t = \omega t^*, \quad u = \frac{u^*}{c_0}, \quad v = \frac{v^*}{c_0}, \quad p = \frac{p^*}{c_0 \rho_0^2}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0} \quad (2)$$

ここで、 u^* と v^* はそれぞれ流速の x^* と y^* 方向成分、 p^* は圧力、 ρ^* は密度であり、下つきの添え字 0 は静止一様状態の値であることを示す。

無次元化された未知変数 u, v, ρ, p に対する支配方程式は、粘性と熱伝導性を考慮した気体力学の基礎方程式系 (Navier-Stokes 方程式系) および理想気体の状態方程式である。

ピストン面上での流速に対する境界条件は

$$x = M(1 - \cos t) \text{ において } u = M \sin t, \quad v = 0 \quad (3)$$

となる。ここで、 M はピストン面上での音響マッハ数であり、

$$M = \frac{a\omega}{c_0} \ll 1 \quad (4)$$

とする (弱非線形問題)。他の境界面では、流速については粘着の条件を課し、全ての境界面で温度は一定であるとする。

さらに、管の幅 W は管壁に生じる振動境界層の厚さに比べて十分に大きいとする:

$$\frac{W\omega}{c_0} = A\pi \gg \epsilon = \frac{\sqrt{\nu\omega}}{c_0} \quad (5)$$

ここで, ϵ は無次元化された境界層厚さ, ν は動粘性率, $A = W/L$ は管のアスペクト比である. 本研究では

$$\epsilon = M\alpha, \quad \text{ただし, } \alpha \text{ は } O(1) \text{ の定数} \quad (6)$$

であるとする. このとき, 管内には無次元振幅 $O(\sqrt{M})$ の衝撃波が発生する.⁴ 管内の気体の振る舞いは, A を定めて管の形状を固定すれば, 2 個のパラメータ M と ϵ によって完全に決定される.

3. 数値解析

前節の定式化のもとに, 基礎方程式系を数値的に解く. 数値計算法は, 衝撃波を含む流れ場を安定に解くために, 高解像度風上差分法⁶を用いる. また, 壁面の振動境界層の内部を正確に計算するために, 壁近傍に格子点を集中させる. 以下に数値計算結果を示す. 計算には, 160×40 と 300×60 の格子点を用いた.

A. 衝撃波の伝播

(4) および (6) 式の条件が成り立つとき, 気体の粘性と熱伝導性による音波の吸収 (減衰) はとても小さい. したがって, 共鳴条件を満たしながら振動するピストンから供給される波のエネルギーは, 散逸されることなく管内に蓄積して行く. これは, 管内の気体の振動が大振幅の振動となり非線形効果が卓越することを意味する. 結果として, 管内には衝撃波が発生する. 衝撃波面でのエネルギー散逸と, ピストンから供給されるエネルギーがバランスすると, ほぼ定常 (周期的) とみなされる状態に達する. このときの衝撃波の無次元振幅は $O(\sqrt{M})$ である.⁴

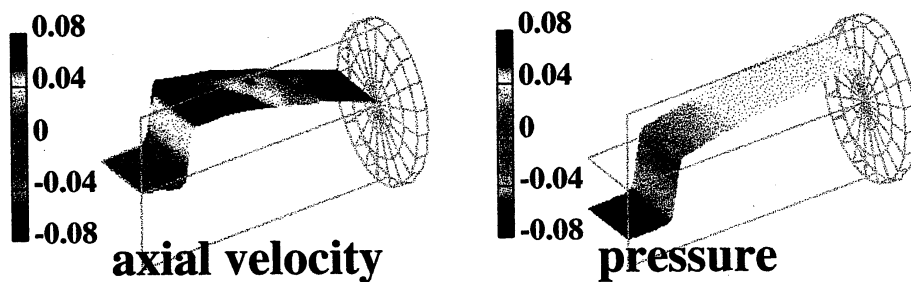


図 3. 定常状態における流速の管軸方向成分の波形と圧力の波形.

$$M = 0.0036, \epsilon = 0.00045.$$

図 3 は, ほぼ定常状態に達した時刻における波動場の様子を示したものである. 波形の急勾配の部分が衝撃波を表している. 流速の管軸方向成分は, 境界層の外側でほぼ 1 次的であるが, 小振幅の不規則な変動が重ね合わされているのが見て取れる. この変動は音響流の流速成分である. Yano⁴ によると, この図に示されたパラメータ ($M = 0.0036, \epsilon = 0.00045$) の場合には, 音響流は乱流化しているとみなされる. 一方, 圧力波形は, 境界層内部も含めて, ほぼ完全に 1 次的である.

B. 音響流の分岐

無次元化された音響流 $\mathbf{u}_s = (u_s, v_s)$ は、音波の周期にわたって時間平均された無次元の質量流束密度を用いて

$$\mathbf{u}_s = \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \end{pmatrix} dt \quad (7)$$

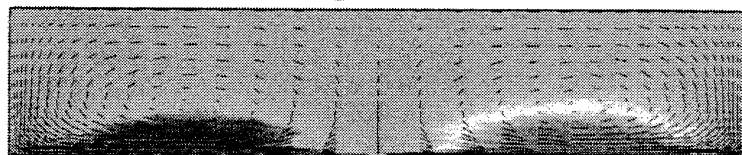
と定義される。線形近似では、 u も v も時間 t の三角関数であり、 $\mathbf{u}_s = 0$ 、つまり、音響流は存在しない。1次元の定在音波の場合には、第2近似に進んでも(7)式の積分はゼロであり、音響流は存在しない。管内に音響流を誘起する原因は、管壁上の境界層の第2近似解に含まれる速度の直流成分である。これが、境界層の外縁においてもゼロとならず、境界層の外側に音響流を発生させるのである。

条件(4)および(6)の場合を扱う本研究では、定常状態において、波の無次元振幅は $O(\sqrt{M})$ である。したがって、2次の非線形効果によって生じる音響流の大きさは $O(M)$ となる。また、音響流の空間的变化の代表スケールは、図1からわかるように、音波の波長程度と考えてよい。これらのことを考慮すると、音響流のレイノルズ数 Re を

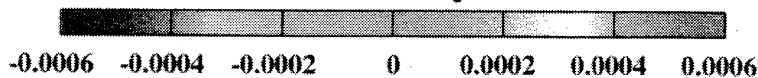
$$Re = \frac{c_0^2 M}{\nu \omega} = \frac{M}{\epsilon^2} = \frac{1}{M \alpha^2} \quad (8)$$

と見積もることができる。ここで、 ϵ の定義として(5)式を使った。(4)および(8)式より、ここで扱う音響流は高レイノルズ数の流れ ($Re \gg 1$) であることがわかる。

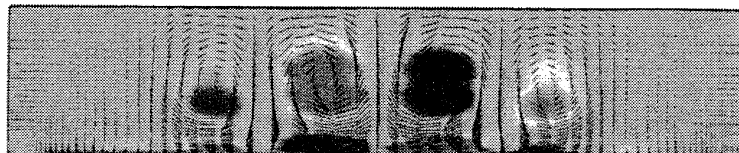
acoustic streaming $M=0.00025, \epsilon=0.00224$



vorticity



acoustic streaming $M=0.0004, \epsilon=0.00224$



vorticity

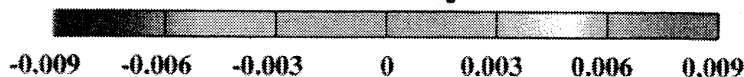
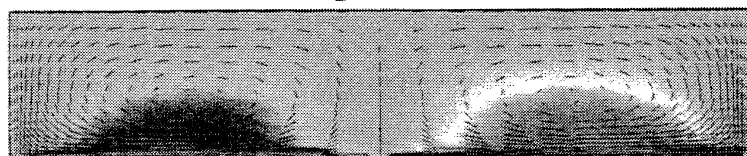


図4. 音響流の流線と渦度。管の中心軸に関する対称性を仮定して計算を行った結果。管内部の下半分が図示されている。左端がピストンの位置で、右端が固定端、下端は下側の管壁である。赤い領域は正の渦度の領域を示している。 $\epsilon = 0.00224$ の場合。上図は $Re = 50$ 、下図は $Re = 80$ 。

図 4 は, $\epsilon = 0.00224$ の場合の, 音響流がほぼ定常流とみなせるまでに発達した時刻の流線と渦度を示している. この場合には, Re が 50 程度まで大きくなっても, 流線は Rayleigh 型の音響流と定性的に変わらない. しかしながら, Re が 80 になると, 渦対が倍化する.

acoustic streaming $M=0.0005, \epsilon=0.00316$



vorticity

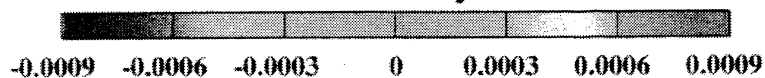
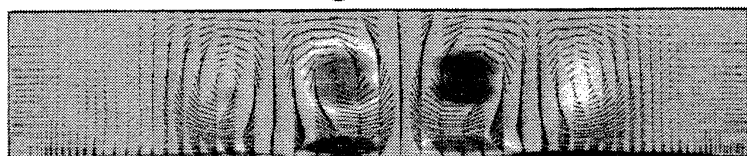


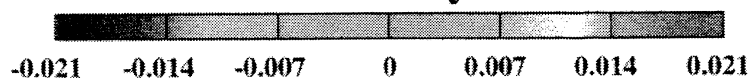
図 5. 音響流の流線と渦度.

$\epsilon = 0.00316$ の場合. 上図は $Re = 50$, 下図は $Re = 80$.

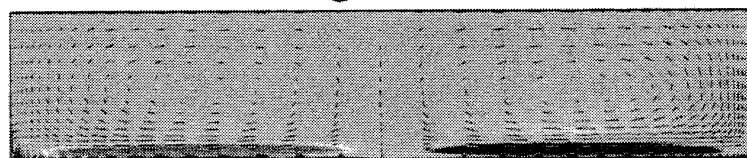
acoustic streaming $M=0.0008, \epsilon=0.00316$



vorticity



acoustic streaming $M=0.005, \epsilon=0.01$



vorticity

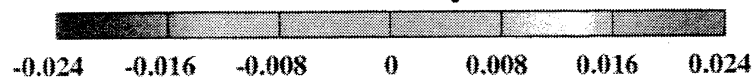
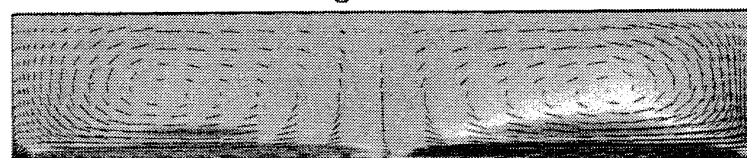


図 6. 音響流の流線と渦度.

$\epsilon = 0.01$ の場合. 上図は $Re = 50$, 下図は $Re = 80$.

acoustic streaming $M=0.008, \epsilon=0.01$



vorticity

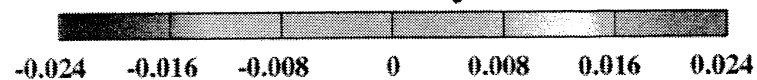
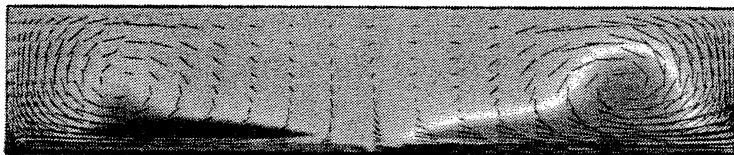


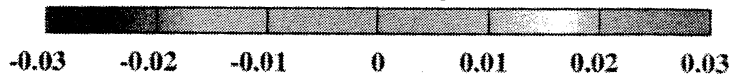
図 5 は $\epsilon = 0.00316$ の場合であり, 図 4 の場合と類似した結果が得られている. このことから, $\epsilon \lesssim 0.003$ の場合には, 音響流の“分岐現象”は唯一のパラメータ Re によって支配されていると予測できる.

ところが, 図 6 に示す $\epsilon = 0.01$ の場合には, $Re = 80$ となっても, Rayleigh 型の流れと類似した流れが得られている.

acoustic streaming $M=0.01, \epsilon=0.00707$



vorticity



acoustic streaming $M=0.015, \epsilon=0.00707$



vorticity

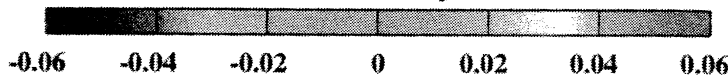


図 7. 音響流の流線と渦度.
 $\epsilon = 0.00707$ の場合. 上図
は $Re = 200$, 下図は $Re =$
 300 .

$\epsilon = 0.00707$ の場合のさらに大きなレイノルズ数の計算結果を図 7 に示す. この場合には, Re が 200 になっても渦の倍化は発生しない. $Re = 300$ になると, 図 4 と 図 5 に示されるような“分岐”を経ることなく, 規則的でない大小の渦が現れる.

4. まとめ

本研究では, M と ϵ の変化にともなって生じる音響流の渦構造の定性的な変化を, 数値計算を用いて調べた. 結果を以下に要約する.

- (i) $\epsilon \lesssim 0.003$ の場合, 音響流の流線は, $Re \lesssim 50$ まで, Rayleigh の音響流と定性的に大差ない. $Re \approx 80$ で, ほぼ定常な 2 対 (4 個) の強い渦が支配的な流れに“分岐”する. 計算を行った範囲内 (400 周期程度) では, 流速は時間とともに緩やかに増大する.
- (ii) $\epsilon \approx 0.01$ の場合, $Re \lesssim 200$ では“渦の分岐”は起こらない. $Re \approx 300$ で, 流線は非対称になり, 多数の渦が生じる.

上記の (i) と (ii) の差異は, 本研究で取り扱った $\epsilon = O(M)$ の場合の音響流の振る舞いが, (8) 式で定義される Re だけでは整理できないことを意味する.

ここで示された渦構造の倍化の物理的な機構はどのように説明されるのか, 上記の (i) と (ii) の差異が生じる原因は何か, 渦構造の倍化はどのような分岐現象として分類されるのか, などの疑問に答えることは今後の課題として残されている.

参考文献

1. W. L. Nyborg, Physical Acoustics, 2B, edited by W. P. Mason, (Academic Press, New York, 1965).
2. Lord Rayleigh, Theory of Sound, (Dover, New York, 1945).
3. S. Backhaus and G. W. Swift, Nature, 399, 6734, 335–338 (1999).
4. T. Yano, J. Acoust. Soc. Am., 106, L7–L12 (1999).
5. W. Chester, J. Fluid Mech., 18, 44–65 (1964).
6. S. R. Chakravarthy, “Development of upwind schemes for the Euler equations,” NASA Contractor Report 4043 (1987).